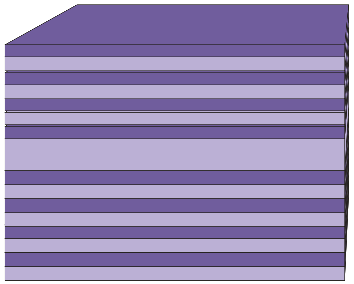
Базовые понятия о фотонных кристаллах.
Закон дисперсии и фотонная запрещенная зона

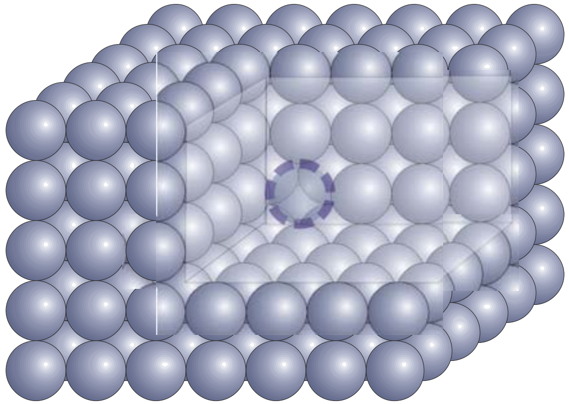
- понятие о фотонных кристаллах
- аналогии между фотонными кристаллами и «атомными» кристаллами
- плотность мод электромагнитного поля
- закон дисперсии фотонных кристаллов
- фотонная запрещенная зона

Понятие о фотонных кристаллах

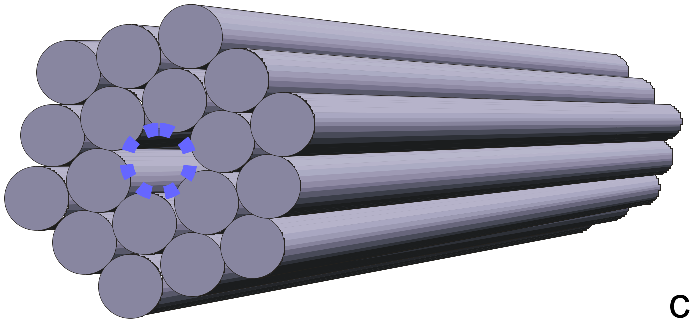
одномерные ФК



трехмерные ФК



двумерные ФК



Диэлектрическая проницаемость представляет собой периодическую функцию

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r} + \mathbf{R}_0)$$

с периодом $\mathbf{R}_0$, равным вектору (векторам) решетки фотонного кристалла:

Твердотельные аналогии

1. Состояние электрона внутри кристалла задается решением уравнения Шрёдингера, распространение света в фотонном кристалле подчиняется волновому уравнению:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla + U(\mathbf{r})\right)\psi_E(\mathbf{r}) = E\psi_E(\mathbf{r}), \qquad \nabla \times \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})}\nabla \times \mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}).$$

2. Состояние электрона описывается скалярной волновой функцией $\psi(\mathbf{r}, t)$, состояние электромагнитной волны описывается векторными полями - напряженностью магнитной или электрической компонент, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ или $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$.

3. Волновая функция электрона может быть разложена в ряд по собственным состояниям $\psi_E(\mathbf{r})$, каждому из которых соответствует собственная энергия *E*. Напряженность электромагнитного поля может быть представлена суперпозицией монохроматических компонент (мод) электромагнитного поля $\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r})$, каждой из которой соответствует собственное значение - частота моды:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_E c_E \psi_E(\mathbf{r}) e^{i\frac{E}{\hbar}t}, \qquad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_\omega c_\omega \mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}) e^{i\omega t}$$

4. Атомный потенциал и диэлектрическая проницаемость представляют собой периодические функции с периодами, равными любым векторам решетки кристалла и фотонного кристалла:

$$U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r} + \mathbf{R}), \qquad \varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r} + \mathbf{R})$$

5. Для волновой функции электрона и напряженности электромагнитного поля выполняется теорема Блоха

$$\psi_\mathbf{k}(\mathbf{r}) = u_\mathbf{k}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \qquad \mathbf{H}_\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_\mathbf{k}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

с периодическими функциями $u_\mathbf{k}$ и $\mathbf{u}_\mathbf{k}$

Твердотельные аналогии

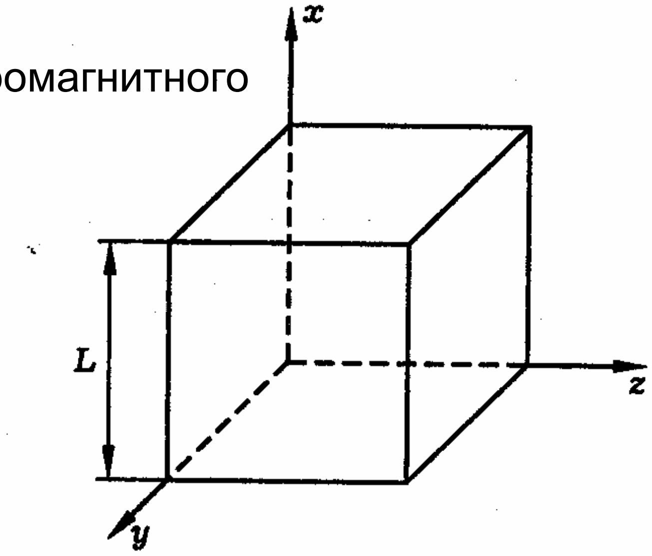
6. Возможные значения волновых векторов заполняют зону Бриллюэна кристаллической решетки или элементарной ячейки фотонного кристалла, задаваемую в пространстве обратных векторов.

7. Энергия электрона, являющаяся собственным значением уравнения Шрёдингера, и собственное значение волнового уравнения - частота моды - связаны со значениями волновых векторов блоховских функций законом дисперсии $E(\mathbf{k})$ и $\omega(\mathbf{k})$.

8. Примесный атом, нарушающий трансляционную симметрию атомного потенциала, является дефектом кристалла и может создавать примесное электронное состояние, локализованное в окрестности дефекта. Изменения диэлектрической проницаемости в определенной области фотонного кристалла нарушают трансляционную симметрию и приводит к появлению разрешенной моды внутри фотонной запрещенной зоны, локализованной в ее пространственной окрестности.

Плотность мод электромагнитного поля

(напоминание)



Напомним, что при разложении произвольного электромагнитного поля внутри ящика квантования с размером L по плоским волнам (модам поля)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

с волновыми векторами, принимающие дискретные значения

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}\{l, m, n\}$$

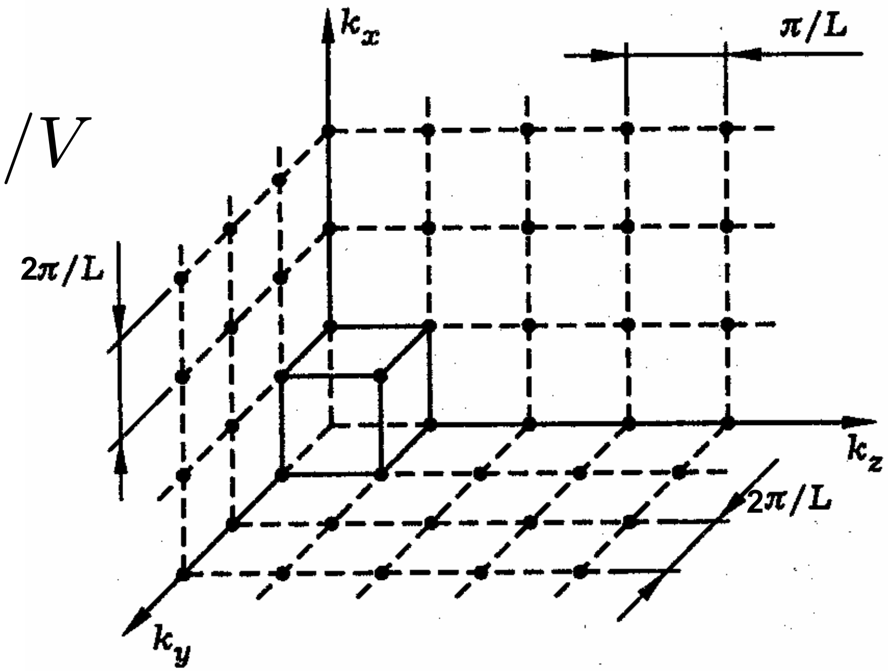
и амплитудами $$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{V}\int_V \mathbf{E}(\mathbf{r},t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}$$

было введено понятие фазового пространства волновых векторов мод электромагнитного поля

Фазовое пространство волновых векторов мод

с расстоянием между модами
в фазовом пространстве, равном $2\pi/L$

и объемом фазового пространства,
приходящегося на одну моду, равном $(2\pi)^3/V$



При этом число мод поля с частотами,
меньшими ω , записывается в виде

$$N(\omega) = 2 \times \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{k=0}^{k=\omega/c} d\mathbf{k}$$

что для однородного пространства со связью между $\mathbf{k}$ и ω в виде

$$|\mathbf{k}(\omega)| = \frac{\omega}{c} (\varepsilon\mu)^{1/2}$$

дает выражение $N(\omega) = \dfrac{\omega^3 V}{3\pi^2 c^3}$ для числа мод и $D(\omega) = \dfrac{\omega^2 V}{\pi^2 c^3}$

для плотности мод (числе мод в интервале частот) ω и $\omega + d\omega$

Число мод и плотность мод

Однако, при интегрировании в явном виде предполагалась линейная связь между волновым вектором и частотой:

$$d\mathbf{k} = 4\pi k^2 dk = 4\pi \frac{\omega^2}{c^3} d\omega$$

Иными словами, закон дисперсии $\mathbf{k}(\omega)$, или (что более верно) $\omega(\mathbf{k})$

брался для однородного пространства.

Напомним:

закон дисперсии $\mathbf{k}(\omega)$ волновое число: $k \equiv |\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$

в вакууме: $\omega = ck$ в однородной среде: $v = c/n$

В средах, в которых $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$, полученные выражения **НЕ** работают !

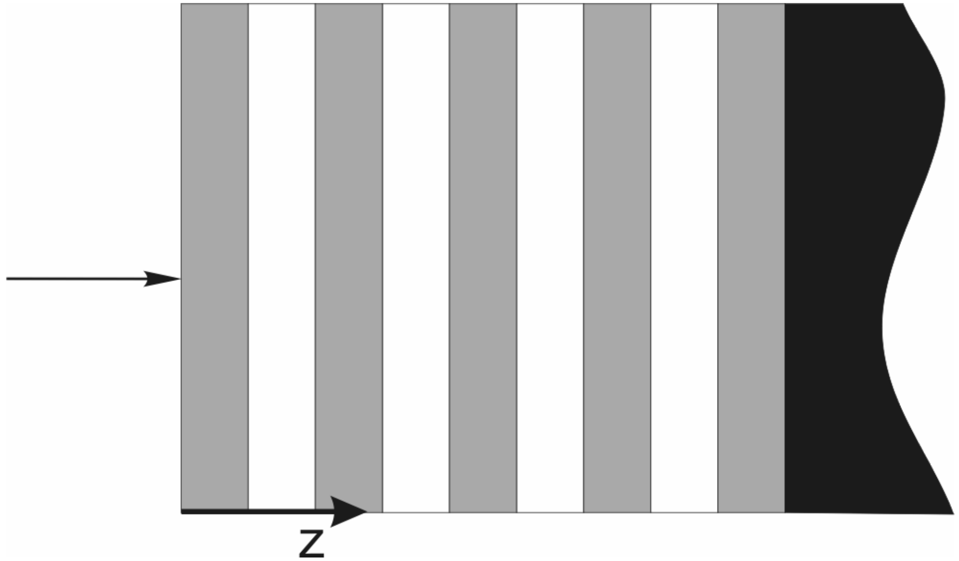
Закон дисперсии фотонных кристаллов

Рассмотрим одномерный случай (многослойная среда).

Диэлектрическая проницаемость периодична вдоль координаты z,

$$\varepsilon(z+a)=\varepsilon(z)$$

с периодом a



Запишем волновое уравнение в среде без источников (линейный случай):

$$\frac{4\pi c^2}{\varepsilon(z)}\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Разложим в ряд Фурье обратную (!) диэлектрическую проницаемость:

$$\varepsilon^{-1}(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\eta_m \exp\left(i\frac{2\pi m}{a}z\right)$$

с амплитудами фурье-гармоник в приближении прозрачной среды:

$$\eta_{-m}=\eta_m^*$$

Закон дисперсии. Одномерный случай

По теореме Блоха, решение волнового уравнения с периодическим потенциалом (диэлектрической проницаемостью) ищется в виде волны

$$E_k(z,t) = u_k(z)\exp\left(i(kz - \omega_k t)\right)$$

с периодической амплитудой $u_k(z+a) = u_k(z)$

при этом частота моды ω_k является собственным значением волнового уравнения.

Поскольку амплитуда моды $u_k(z)$ - периодична, то ее можно разложить в ряд Фурье:

$$E_k(z,t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m \exp\left(i\left(k + \frac{2\pi m}{a}\right)z - i\omega_k t\right)$$

Подставим $E_k(z,t)$ и $\varepsilon^{-1}(z)$ в волновое уравнение

Волновое уравнение для мод. Одномерный случай

Возьмем только 3 первых члена

$$\varepsilon^{-1}(z) \approx \eta_0 + \eta_1 \exp\left(i\frac{2\pi}{a}z\right) + \eta_{-1} \exp\left(-i\frac{2\pi}{a}z\right)$$

вторые производные $E_k(z,t)$ имеют вид:

$$\frac{\partial^2 E_k}{\partial z^2} = -\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(k + \frac{2\pi m}{a}\right)^2 E_m \exp\left(i\left(k + \frac{2\pi m}{a}\right)z - i\omega_k t\right)$$

$$\frac{\partial^2 E_k}{\partial t^2} = -\omega_k^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m \exp\left(i\left(k + \frac{2\pi m}{a}\right)z - i\omega_k t\right)$$

Волновое уравнение для мод. Одномерный случай

Подставим в волновое уравнение и приравняем члены с одинаковым фазовым множителем. Помним, что разложении в ряд поля и диэлектрической проницаемости есть фазовые множители вида

$$\exp\left(\pm i\frac{2\pi}{a}z\right) \quad \text{и} \quad \exp\left(i\left(k+\frac{2\pi m}{a}\right)z\right)$$

Волновое уравнение для отдельной фурье-гармоники запишется как

$$\eta_1\left(k+\frac{2(m-1)\pi}{a}\right)^2 E_{m-1}+\eta_{-1}\left(k+\frac{2(m+1)\pi}{a}\right)^2 E_{m+1}$$
$$\approx\left(\frac{\omega_k^2}{4\pi c^2}-\eta_0\left(k+\frac{2m\pi}{a}\right)^2\right)E_m$$

(знак примерного равенства указывает всего лишь на приближенную запись разложения диэлектрической проницаемости)

Закон дисперсии. Одномерный случай

продолжение

Итак, волновое уравнение распалось на систему линейных уравнений, каждое из которых завязывает три соседних фурье-гармоники поля (три моды)

$$E_{m-1},\ E_m,\ E_{m+1}$$

Нас будет интересовать уравнения для низкочастотных мод, т.е. мод с малыми *m*

для *m*=0

$$E_0 \approx \frac{c^2}{(\omega_k^2 - \eta_0 c^2 k^2)} \left(\eta_1 \left(k - \frac{2\pi}{a} \right)^2 E_{-1} + \eta_{-1} \left(k + \frac{2\pi}{a} \right)^2 E_1 \right)$$

для *m*=-1

$$E_{-1} \approx \frac{c^2}{(\omega_k^2 - \eta_0 c^2 (k - \frac{2\pi}{a})^2)} \left(\eta_1 \left(k - \frac{4\pi}{a} \right)^2 E_{-2} + \eta_{-1} k^2 E_0 \right)$$

Формально, это два уравнения с четырьмя неизвестными.

Однако, есть выделенная область частот $\omega_k \approx \eta_0^{1/2} ck$ и $\omega_k \approx \eta_0^{1/2} c \left(k - \frac{2\pi}{a}\right)$

в окрестности которой $E_0,\ E_{-1}$ доминируют и вкладами амплитуд $E_{-2},\ E_1$

можно пренебречь

Закон дисперсии. Одномерный случай

продолжение

Тогда система уравнений для четырех неизвестных преобразуется в систему связанных уравнений для амплитуд $E_0,\ E_{-1}$:

$$(\omega_k^2 - \eta_0 c^2 k^2) E_0 - \eta_1 c^2 \left(k - \frac{2\pi}{a}\right)^2 E_{-1} = 0,$$

$$\eta_{-1} c^2 k^2 E_0 + \left(\omega_k^2 - \eta_0 c^2 \left(k - \frac{2\pi}{a}\right)^2\right) E_{-1} = 0$$

заметим, что

1. знак приближенного равенств уже потерян, поскольку уравнения и так получены в рамках довольно узких ограничений на область определения
2. множитель 4π тоже не выписан, его можно внести в определение η_m

Можно показать, что указанные области волновых векторов эквивалентны:

$$|k| = |k - 2\pi/a|$$

Позднее $2\pi/a$ будем называть вектором обратной решетки фотонного кристалла

Для решения этой системы уравнений ищем детерминант

Характеристическое уравнение

детерминант

$$\begin{vmatrix} \omega_k^2 - \eta_0 c^2 k^2 & -\eta_1 c^2 \left(k - \frac{2\pi}{a}\right)^2 \\ -\eta_{-1} c^2 k^2 & \omega_k^2 - \eta_0 c^2 \left(k - \frac{2\pi}{a}\right)^2 \end{vmatrix}$$

наличие решения системы уравнений требует равенства его нулю:

$$\begin{vmatrix} \omega_k^2 - \eta_0 c^2 k^2 & -\eta_1 c^2 \left(k - \frac{2\pi}{a}\right)^2 \\ -\eta_{-1} c^2 k^2 & \omega_k^2 - \eta_0 c^2 \left(k - \frac{2\pi}{a}\right)^2 \end{vmatrix} = 0$$

что эквивалентно квадратному уравнению, называемому характеристическим.

заменим переменные: $\mu = k - \frac{\pi}{a}$

тогда $k^2 = \left(\mu + \frac{\pi}{a}\right)^2$ и $\left(k - \frac{2\pi}{a}\right)^2 = \left(\mu - \frac{\pi}{a}\right)^2$

Характеристическое уравнение (2)

при условии $|\mu| \ll \dfrac{\pi}{a}$

решение характеристического уравнения (закон дисперсии):

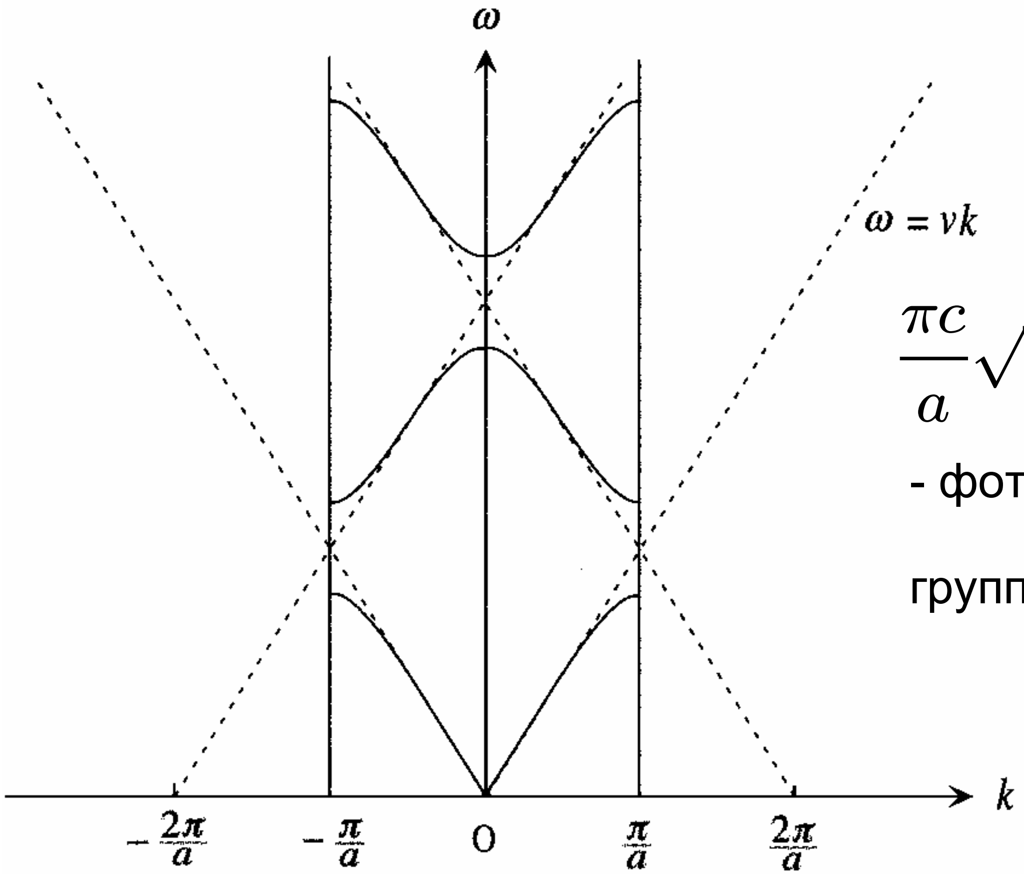
$$\omega_{\pm}(k) = \frac{\pi c}{a}\sqrt{\eta_0 \pm \eta_1} \pm \frac{ac}{\pi\eta_1}\left(\eta_0^2 - \frac{\eta_1^2}{2}\right)\left(k - \frac{\pi}{a}\right)^2$$

диапазон волновых чисел $k \approx k - 2\pi/a \Rightarrow k \approx \pi/a$

! наличие двух ветвей $\omega_-(k),\ \omega_+(k)$

разрыв в точке $k = \pi/a$

Фотонная запрещенная зона



разрыв закона дисперсии при $k = \pi/a$

в диапазоне частот

$$\frac{\pi c}{a}\sqrt{\eta_0 - \eta_1} < \omega < \frac{\pi c}{a}\sqrt{\eta_0 + \eta_1}$$

- фотонная запрещенная зона

групповая скорость $\mathbf{v}_g = \dfrac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$

$$v_{g\pm}(k) = \pm\frac{2ac}{\pi\eta_1}\left(\eta_0^2 - \frac{\eta_1^2}{2}\right)\left(k - \frac{\pi}{a}\right)$$

при $k \to \pi/a$

$v_g \to 0$