Электромагнитное излучение в среде. Плотность мод, закон дисперсии

- уравнения Максвелла
- материальные уравнения
- волновое уравнение
- плотность мод электромагнитного поля
- вероятность спонтанного излучения

Уравнения Максвелла. Общий вид

первая пара уравнений Максвелла – векторная:

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \qquad \mathrm{rot}\ \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

вторая пара уравнений Максвелла – скалярная:

$$\mathrm{div}\ \mathbf{D} = 4\pi\rho \qquad \mathrm{div}\ \mathbf{B} = 0$$

$\mathbf{H},\ \mathbf{B},\ \mathbf{D},\ \mathbf{E}$ - магнитный вектор, магнитная индукция, электрическое смещение и электрический вектор

$\mathbf{j},\ \rho$ - плотности электрического тока и электрического заряда

замечания:

1. четвертое уравнение показывает отсутствие магнитного монополя
2. $\rho(\mathbf{r}, t) = \sum e_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$,
3. $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum e_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$

Уравнения Максвелла. Общий вид

Иногда уравнения Максвелла записываются в виде

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \ ,$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \ ,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \ ,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \ .$$

Здесь используется запись с векторным оператором ∇ :

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A}$$

Материальные уравнения

материальные уравнения – соотношения, описывающие отклик веществ на внешние поля

$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ - форма закона Ома, σ - удельная проводимость

$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ε - диэлектрическая проницаемость

$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ μ - магнитная проницаемость

материальные уравнения можно записать, введя поляризацию ($\mathbf{P}$) и намагниченность ($\mathbf{M}$):

$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$ и $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$

замечания:

1. в линейном случае $\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$, где χ - (линейная) восприимчивость
2. величины $\sigma,\ \varepsilon,\ \mu$ рассматриваются на тех же частотах, что и $\mathbf{B},\ \mathbf{D},\ \mathbf{E}$
3. зависимость $\varepsilon(\omega)$ называется дисперсией вещества

Граничные условия

- непрерывность нормальной компоненты **B**
- непрерывность тангенциальной компоненты **E**
- разрыв нормальной компоненты **D,** определяемый плотностью заряда на границе раздела
- разрыв тангенциальной компоненты **H**, определяемый плотностью тока на границе раздела

Вывод граничных условий

понадобятся теорема Гаусса $$\int \mathrm{div}\mathbf{A} dV = \int (\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}) dS$$

и теорема Стокса: $$\int (\mathrm{rot}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}) dS = \int (\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r})$$

тогда

$$\int \mathrm{div}\mathbf{B}\, dV = \int (\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}) dS = 0$$ и $$(\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{n}_1 + \mathbf{B}_2\cdot\mathbf{n}_2)\delta A = 0$$

и окончательно $$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$$

либо

$$\int (\mathrm{rot}\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}) dS = \int (\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}) = -\frac{1}{c}\int (\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}) dS$$

и $$(\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{t}_1)\delta s_1 + (\mathbf{E}_2\cdot\mathbf{t}_2)\delta s_2 = -\frac{1}{c}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{n})\delta s\delta h$$

и окончательно $$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$$

Волновое уравнение

- Общий вид волнового уравнения

(изотропная среда с поляризацией и без свободных зарядов)

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 \mathbf{E} = -\left[k_0^2 \mathbf{P} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{P})\right] \quad ,$$

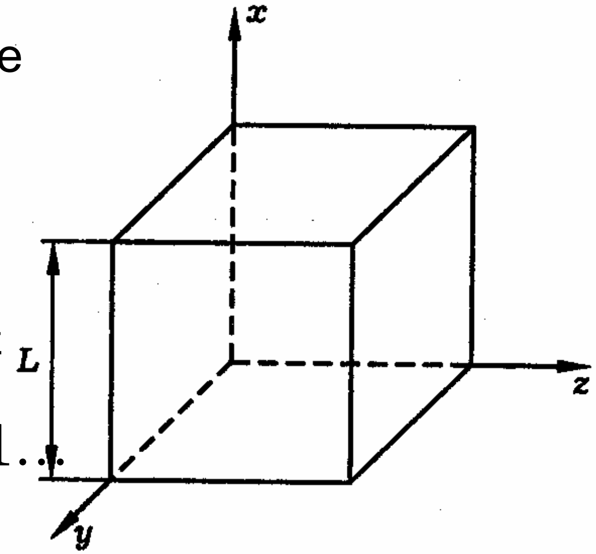
$$k_0^2 = \omega^2 / c^2 \quad .$$

- В свободном пространстве

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 \mathbf{E} = 0 \quad .$$

Плотность мод электромагнитного поля (1)

Рассмотрим произвольное электромагнитное поле в кубе с ребром L



Для компоненты поля, распространяющегося вдоль оси z

периодичность $E(z+nL)=E(z),\ n=0,\pm1\ldots$

периодичные граничные условия

$$E(z=0)=E(z=L)=0$$

разложение по плоским волнам (модам)

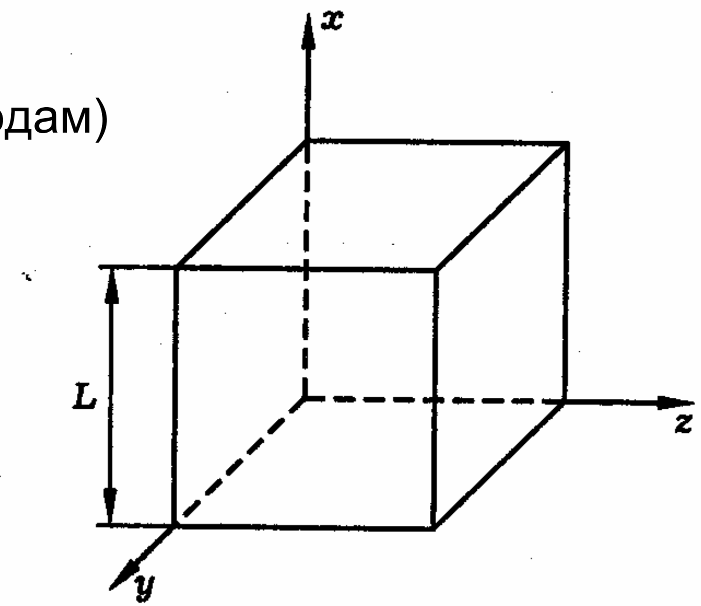
$$E(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m e^{ik_m z}$$

$k_m=\frac{2\pi}{L}m,\ \ m=0,\pm1,\pm2,\ldots$ - волновые числа, принимающие дискретные значения

Плотность мод электромагнитного поля (2)

используя разложение по плоским волнам (модам)

$$E(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m e^{ik_m z}$$



проинтегрируем по кубу:

ищем выражение для амплитуды моды

$$\int_{-L/2}^{L/2} dz e^{-ik_n z} E(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m \int_{-L/2}^{L/2} dz\, e^{-ik_n z} e^{ik_m z}$$

$$f(k_m - k_n) \equiv \int_{-L/2}^{L/2} dz\, e^{i(k_m - k_n)z} = L\operatorname{sinc}(\pi(m-n)) = L\delta_{mn}$$

Дискретное разложение по плоским волнам

окончательно, для амплитуды моды:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m \delta_{mn} \equiv E_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dz e^{-ik_n z} E(z)$$

В трехмерном случае: выражение для поля

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{lmn} \mathbf{E}_{lmn} e^{i2\pi(lx+my+nz)/L}, \quad l, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

а волновой вектор моды $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}\{l, m, n\}$

В векторном виде:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

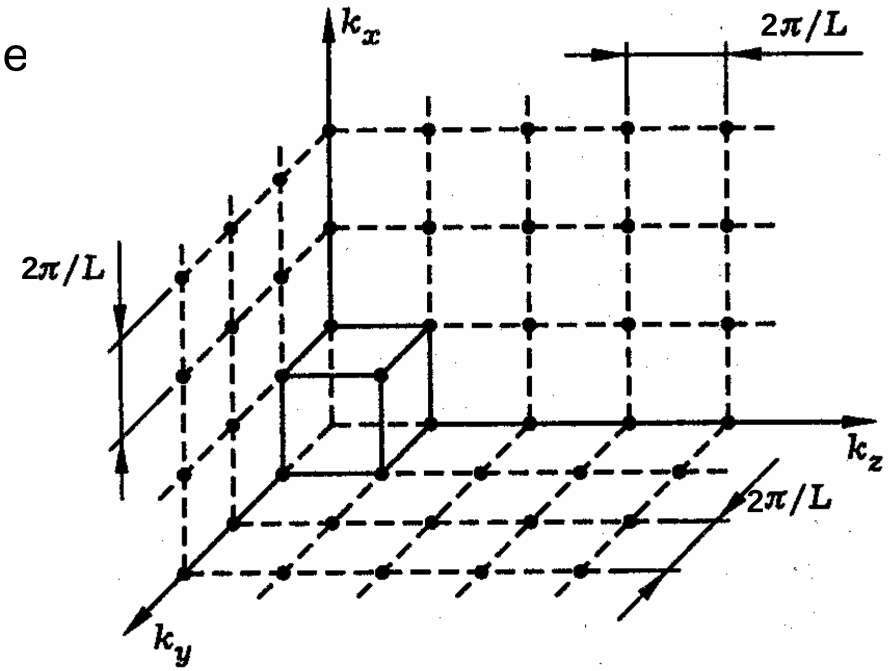
! объем куба квантования $V = L^3$
зависимость от времени $\exp(-i\omega_k t)$
частота моды $\omega_k = ck$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}$$

Фазовое пространство волновых векторов мод

итак, делая трехмерное преобразование

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \Rightarrow \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t)$$



из вещественности поля

$$\mathbf{E}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{*}$$

расстояние между модами
в фазовом пространстве $\quad 2\pi/L$

объем фазового пространства
на одну моду $\quad (2\pi)^3/V$

Непрерывное разложение по модам: переход к интегралу Фурье

В пределе $L \to \infty$

ряд Фурье

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

переходит в интеграл Фурье

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{k},t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k}$$

с фурье-амплитудами

$$\mathbf{E}(\mathbf{k},t) = \frac{1}{V} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}$$

формальное правило перехода от суммы к интегралу

$$\textstyle\sum_m \ldots \to (L/2\pi)^3 \int d\mathbf{k}$$

следует из интегрального представления дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{ikz} = \lim_{L\to\infty} L\mathrm{sinc}(kL/2) = 2\pi\delta(k)$$

Число мод

Число мод поля с частотами, меньшими ω

$$N(\omega) = 2 \times \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{k=0}^{k=\omega/c} d\mathbf{k}$$

и равно

$$N(\omega) = \frac{\omega^3 V}{3\pi^2 c^3}$$

объем в фазовом пространстве (шар радиусом $k = \omega/c$)

$$W(\omega) = \frac{4}{3}\pi k^3 = \frac{4\pi\omega^3}{3c^3}$$

объем в фазовом пространстве на одну моду

$$v = (2\pi)^3/V$$

а число мод

$$N(\omega) = 2 \times \frac{W(\omega)}{v} = 2 \cdot \frac{4\pi\omega^3}{3c^3} \cdot \frac{V}{8\pi^3} = \frac{\omega^3 V}{3\pi^2 c^3}$$

Число мод и плотность мод

Число мод поля с частотами, меньшими ω

$$N(\omega) = \frac{\omega^3 V}{3\pi^2 c^3}$$

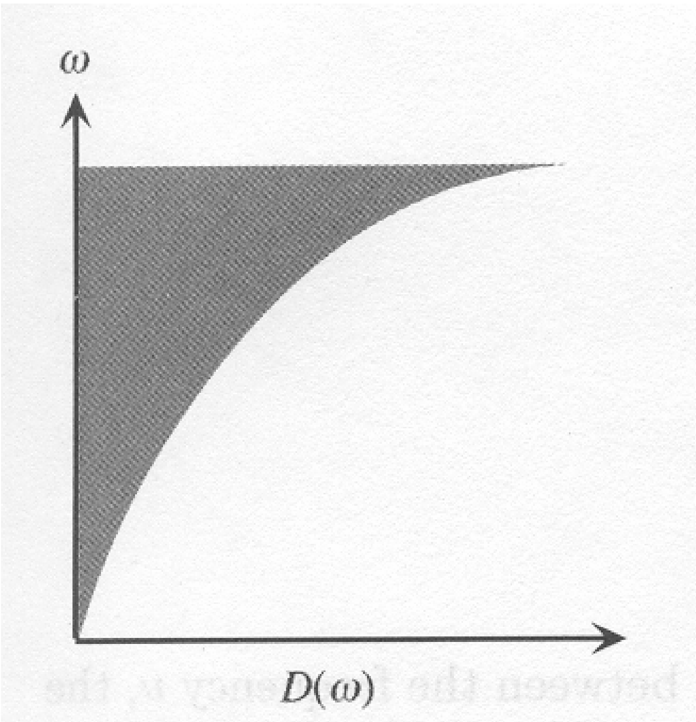
плотность мод

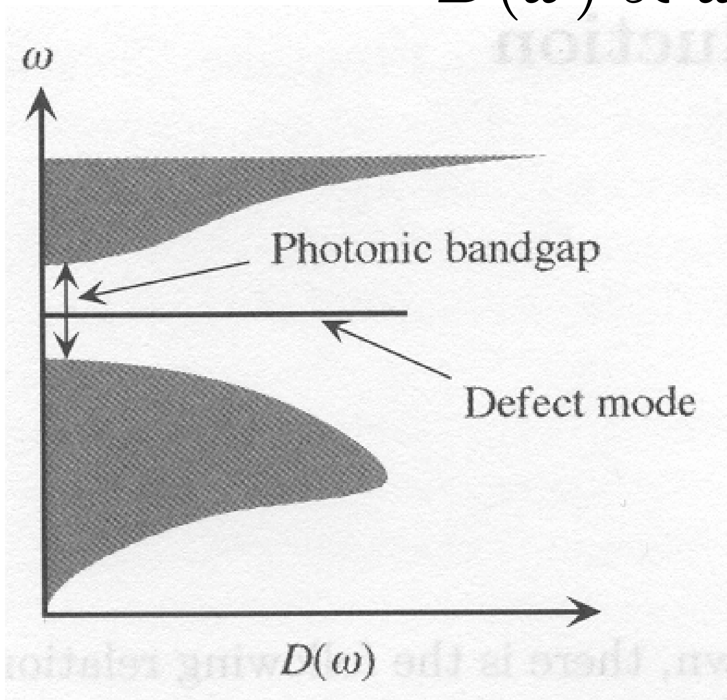
$$D(\omega) = dN(\omega)/d\omega$$

число мод в интервале частот ω и $\omega + d\omega$

$$D(\omega) = \frac{\omega^2 V}{\pi^2 c^3}$$

отметим $D(\omega) \propto \omega^2$





Вероятность спонтанного излучения

Энергия излучения диполя
за единицу времени

$$U = \frac{4\pi^2\omega^2}{3V}|\mathbf{d}|^2 D(\omega)$$

Скорость излучения фотона
с энергией $\hbar\omega$

$$P = U/\hbar\omega$$

или

$$P = \frac{4|\mathbf{d}|^2\omega^3}{3\hbar c^3} \propto \omega D(\omega)$$

Закон дисперсии электромагнитных волн

напоминание:
закон дисперсии $\mathbf{k}(\omega)$

волновое число $k \equiv |\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$

в вакууме $\omega = ck$

в однородной среде $v = c/n$